#### Лекция № 5

###### Математическая формулировка основной задачи линейного программирования (ОЗЛП).

###### Формулировка ОЗЛП.

Имеется ряд переменных

*x*1*,x*2 *,...,xn* . Требуется найти такие

неотрицательные значения этих переменных, которые удовлетворяли бы системе линейных уравнений:

*a*11*x*1  *a*12 *x*2  *...* *a*1*n xn*  *b*1 



*a*21*x*1

 *a*22 *x*2

 *...* *a*2*n xn*

 *b*2 

(4.1)

*..........* 



*am*1*x*1  *am*2 *x*2  *...* *amnxn*  *bm* 

и, кроме того, обращали бы в минимум линейную функцию

E  C1 *x*1  C2 *x*2  ...  Cn *xn* . (4.2) Вместо минимума Е можно рассматривать максимум следующей функции Е’:

E  E  -C *x*  C *x*  ...  C *x*

(4.3)

1 1 2 2 n *n*

Любая совокупность переменных

*x*1  0, *x*2  0,..., *xn*  0,

удовлетворяющая уравнениям (4.1), называется допустимым решением ОЗЛП.

Если допустимое решение обращает в минимум функцию Е (4.2), то оно называется *оптимальным*. *ОЗЛП необязательно должна иметь решение*. Может оказаться, что уравнения из (4.1) противоречат друг другу; может оказаться, что они имеют решение, но не в области неотрицательных

значений

x1 , x 2 ,..., xn .

Тогда ОЗЛП не имеет допустимых решений. Наконец,

допустимые решения ОЗЛП существуют, но среди них нет оптимального: функция Е в области допустимых решений не ограничена снизу.

###### 2 Условия существования допустимых решений.

Наличие допустимых решений определяется только уравнениями (4.1). Итак, пусть дана система (4.1). Существуют ли неотрицательные значения

x1 , x 2 ,..., xn , удовлетворяющих этой системе? Этот вопрос рассматривается в линейной алгебре.

Если дана система (4.1), то таблица

 *a*11 *a*12 *...a*1*n*



 *a*21 *a*22 *...a*2*n*

 *........*





 - называется *матрицей системы*,



а таблица



 *am*1

*am*2

*...a*



*mn* 

 *a*11 *a*12 *...a*1*n b*1



 *a*21 *a*22 *...a*2*n b*2

 *........*





 - *расширенной матрицей системы*.



 

*a a ...a b*

 *m*1 *m* 2 *mn m* 

**Ранг матрицы** – наибольший порядок отличного от нуля определителя, который можно получить, вычеркивая из матрицы какие-то строки и столбцы.

В линейной алгебре доказывается, что система (4.1) совместна, если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы (необходимое и достаточные условие) (теорема Кронекера-Капелли).

Пример 1. Дана система:

2x1  *x*2  *x*3  *x*4  1



x1  *x*2  2 



x1  2*x*3  3 

Определить: совместна ли она?

|  |  |
| --- | --- |
| Матрица системы: | Расширенная матрица: |
|  2 1  1 1  1  1 0 0 1 0  2 0  |  2 1  1 1  1  1  1 0 0 2 1 0  2 0 3  |
| Ранг этой матрицы не может быть больше 3 (число строк = 3).Вычеркнем последний столбец исоставим определитель. | Ранг расширенной матрицы тоже равен 3, т.к. из элементов её можно составить тот же определитель. |

2 1 1

  11

0  5 , Так как,

  5 ранг матрицы равен 3.

1 0  2

Из равенства рангов следует, что система совместна. Пример 2.

2x1  *x*2  *x*3



 4

Расширенная матрица

4x1  2*x*2  2*x*3  1

 2 - 1 1 - 4

 

 4 - 2 2 1

Из матрицы системы можно составить:

  2  1

1 4  2

 0;

  2

2 4

1  0;

2

   1

3  2

1  0

2

Значит, ранг матрицы системы

*rc* 1 2.

Ранг расширенной матрицы системы

*rp*  2 , так как определитель

  2  4  2 16  18  0

4 1

Значит,

*rp*  *rc* . Отсюда, система несовместна.

Пример 3.

*x*1  *x*2  *x*3  *x*4  2

*x*  *x*  *x*  *x*  1

 1 2 3 4

3*x*  *x*  3*x*  *x*  0

Расширенная матрица:

 1 2

1 1



3 4

1 1 2 



1 1 1 1 1 



0



Возьмём

31 3 1 

1 1 1

1 

1 1

31

1  0,

3

т.к. 3-я строка – линейная комбинация первых двух: чтобы её получить, нужно сложить 1-ую строку с удвоенной 2-ой строкой.

Таким же свойством обладают и все другие определители третьего

порядка, составленные из элементов матрицы. Значит, имеется

*rc*  3 ;

*rc*  2 , т.к.

  1 1  2 .

2 1 1

Можно показать, что

*rp*  2 . Система совместна. Заметим, что три

уравнения нашей системы не являются независимыми: 3-е уравнение можно получить из первых двух. Значит, 3-е уравнение есть простое следствие первых двух. Независимых уравнений только два: это отражено тем, что *rc*  2 .

Итак, ранг системы *r* - есть число *линейно не зависимых* уравнений среди наложенных ограничений.

Очевидно, что

*rc*  *m rc*  *n*

( *m* - число уравнений в системе) и

( *n* - число переменных в уравнении).

*Структура задачи линейного программирования* существенно зависит от ранга системы ограничений (4.1.).

**Случай I.** Пусть

*r*  *n* , т.е. число линейно независимых уравнений в

системе (2.1.), равно числу переменных *n* .

Отбросим в системе (4.1.) «лишние» уравнения, являющиеся линейными комбинациями других. Система ограничений принимает вид:

*a*11*x*1  *a*12 *x*2  ...  *a*1*i xi*  ...  *a*1*n xn*  *b*1 

*a x*  *a x*  ...  *a x*  ...  *a x*  *b* 

21 1

22 2

2*i i*

2*n n* 2 

(4.4)

........................................................ 



т.к.

*an*1*x*1  *an*2 *x*2  ...  *ani xi*  ...  *annxn*  *bn* 

*rc*  *n* , то определитель  из всех коэффициентов системы не равен

нулю. Из алгебры известно, что в этом случае (4.4) имеет *единственное*

решение.

Чтобы найти

1. достаточно в определителе  системы заменить *i* -й

столбец – столбцом свободных членов и разделить на  , т.е.   



*i*

 *x*



-

*i* 

 

правило Крамера.

Итак, если

*rc*  *n* , то система уравнений – ограничений ОЗЛП имеет

единственное решение:

*x*1 , *x*2 ,..., *xn* .

Если в этом решении хотя бы одна из величин

*x*1 , *x*2 ,..., *xn*

отрицательна,

то полученное решение недопустимо и, значит, ОЗЛП не имеет решения.

Если все

*xi*  0 ;

*i*  1, *n* , то найденное решение допустимо, и оно же

является оптимальным (других нет!). Значит, рассмотренный случай – тривиальный.

**Случай II** (этот случай мы будем рассматривать далее).

*rc*  *n* , т.е. число независимых уравнений в системе (4.1) меньше числа

*n* . Тогда, если система совместна ( *rc*  *rp* ), то у неё существует бесчисленное

множество решений. При этом,

*n*  *rc*

переменным мы можем придавать

произвольные значения (так называемые *свободные* переменные), а

остальные *rc*

переменных выразятся через них (эти *rc*

переменных

называются *базисными*). Пример.

2*x*1  *x*2  *x*3  *x*4  1 

(4.5)





 *x*1  *x*2  2*x*3  *x*4  2

Здесь

*rc*  2

(т.е. уравнения линейно независимы).

Выберем в качестве свободных переменные

*x*3 и

*x*4 , а в качестве базисных –

*x*1 и

*x*2 .

Из (4.5) имеем:

2*x*1  *x*2  1 *x*3  *x*4 



 *x*1  *x*2  2  2*x*3  *x*4 

Складывая, получим

*x*1  3  *x*3

Умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым, получим:

*x*2  5  3*x*3  *x*4

Свободным переменным можно придавать любые значения. При этом мы

всегда получаем совокупность значений

*x*1, *x*2 , *x*3 , *x*4 , удовлетворяющих (4.5).

В дальнейшем будем считать для простоты, записывая уравнения

ОЗЛП их линейно независимыми (ранг системы *rc*

будет равен числу

уравнений:

*rc*  *m* ).

Итак, если

*rc*  *m*

и *rc*  *n* , то (4.1) имеет бесчисленное множество

решений, т.е. совокупность

*x*1 , *x*2 ,..., *xn* , удовлетворяющих ограничениям

(4.1). Если среди этих решений нет ни одного, для которого все неотрицательны, то ОЗЛП не имеет допустимого решения.

*x*1 , *x*2 ,..., *xn*

Если же существуют «неотрицательные» решения, то каждое из них

допустимо. Вот здесь и возникает задача - найти среди допустимых решений оптимальное, т.е. такое решение

для которого линейная функция

*x*1 , *x*2 ,..., *xn* ,

*E*  *c*1*x*1  *c*2 *x*2 ... *cn xn* min.

###### Контрольные вопросы

1. Как формулируется основная задача линейного программирования (ОЗЛП)?
2. Что понимается под аддитивностью показателя эффективности в задачах ЛП?
3. Какую роль играет ранг матрицы уравнений (неравенств) ограничений в структуре задач ЛП?
4. Допустимые решения. Условия существования допустимых решений в задачах ЛП.